บทที่ 1

กรุป (Groups)

สัญลักษณ์

ต่อไปนี้เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้สำหรับเอกสารประกอบวิชา ค.331 : พีชคณิตนามธรรม 1

$\mathbb{N}$ = เซตของจำนวนนับ

$\mathbb{Z}$ = เซตของจำนวนเต็ม

$\mathbb{Z}^+$ = เซตของจำนวนเต็มบวก

$\mathbb{Z}^-$ = เซตของจำนวนเต็มลบ

$\mathbb{Q}$ = เซตของจำนวนตรรกยะ

$\mathbb{Q}^+$ = เซตของจำนวนตรรกยะบวก

$\mathbb{Q}^-$ = เซตของจำนวนตรรกยะลบ

$\mathbb{R}$ = เซตของจำนวนจริง

$\mathbb{R}^+$ = เซตของจำนวนจริงบวก

$\mathbb{R}^-$ = เซตของจำนวนจริงลบ

$\mathbb{C}$ = เซตของจำนวนเชิงซ้อน

1.1 การดำเนินการทวิภาค (Binary Operations)

บทนิยาม 1.1 กำหนดให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $A\times A=\{(a,b)\mid a,b\in A\}$ เป็นผลคูณคาร์ทีเซียน (cartesian) ของเซต A จะเรียกฟังก์ชัน $*$ จาก $A\times A$ ไปยัง A ว่า **การดำเนินการทวิภาคบนเซต A (binary operation on set A)** หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า การดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต A เป็นสมบัติ ซึ่งกำหนดว่าทุกๆ คู่อันดับ $(a,b)\in A\times A$ ต้องไปเกี่ยวข้องกับสมาชิกในเซต A **เพียงตัวเดียวเท่านั้น** โดยสมาชิกตัวนี้จะเขียนแทนด้วย $*((a,b))$ (ภาพ (image) ของ (a,b)) ต่อไปจะเขียนแทน $*((a,b))$ ด้วย $a*b$

ตัวอย่าง 1.2 กำหนดให้ $+:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ นิยามโดย $+\big((a,b)\big)=a+b$ (ผลบวกของ a และ b)

เช่น $+\big((2,3)\big)=2+3=5$

$+\big((-1,0)\big)=-1+0=-1$

ดังนั้น การบวก ($+$) เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของจำนวนเต็ม และจะใช้ $a+b$ แทน $+\big((a,b)\big)$

ตัวอย่าง 1.3 กำหนดให้ $-:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ นิยามโดย $-\big((a,b)\big)=a-b$ (ผลต่างของ a และ b)

เช่น $-\big((4,3)\big)=4-3=1$

$+\big((7,-2)\big)=7-(-2)=9$

ดังนั้น การลบ ($-$) เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของจำนวนเต็ม และจะใช้ $a-b$ แทน $-\big((a,b)\big)$

ตัวอย่าง 1.4 กำหนดให้ $\times:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ นิยามโดย $\times\big((a,b)\big)=a\times b$ (ผลคูณของ a และ b)

เช่น $\times\big((5,1)\big)=5\times1=5$

$\times\big((8,-3)\big)=8\times(-3)=-24$

ดังนั้น การคูณ ($\times$) เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของจำนวนเต็ม และจะใช้ $a\times b$ แทน $\times\big((a,b)\big)$

สรุป การบวก การลบ และการคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}$

คำถาม การหาร ($\div$) เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของจำนวนเต็มหรือไม่

คำตอบ การหาร ($\div$) **ไม่**เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของจำนวนเต็ม เพราะว่า $(1,2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ แต่ $\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$

ตัวอย่าง 1.4 การบวก การลบ และการคูณ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ แต่การหาร ไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$

ตัวอย่าง 1.5 กำหนดให้ $G=\{1,-1,i,-i\}$ เป็นเซตย่อย (subset) ของเซตของจำนวนเชิงซ้อน $\mathbb{C}$

พิจารณาตารางการคูณของสมาชิกในเซต G ต่อไปนี้

$\times$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

จะพบว่าการคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G ทั้งนี้เพราะว่าทุกๆ คู่อันดับ $(a,b)\in G\times G$ จะไปเกี่ยวข้องกับสมาชิกในเซต G **เพียงตัวเดียวเท่านั้น**

หมายเหตุ ตัวอย่าง 1.5 เป็นการแสดงการดำเนินการทวิภาคโดยตาราง ซึ่งถ้าเซต A เป็นเซตจำกัดที่มีจำนวนสมาชิกน้อยๆ เพื่อความสะดวกจะนิยมใช้ตารางกำหนดการดำเนินการทวิภาคบนเซต A ซึ่งมีวิธีสร้างตารางดังนี้

เริ่มจากเขียนสมาชิกทั้งหมดของเซต A ลงบนแถวบนสุดและหลักแรกของตาราง โดยให้ลำดับของสมาชิกเหมือนกัน ในการหาผลลัพธ์ที่ได้จาก $a*b$ อาจดูได้จากตาราง

$*$	$\cdots$	a	$\cdots$	b
$\vdots$				
a		$a*a$		$a*b$
$\vdots$				
b		$b*a$		$b*b$

จากตาราง สมาชิกในตารางที่อยู่ในตำแหน่งของแถวตรงกับสมาชิก $a \in A$ และตำแหน่งของหลักตรงกับสมาชิก $b \in A$ หมายถึง $a*b$ ซึ่งตารางดังกล่าวข้างต้น เรียกว่า **ตารางการคูณของเคย์เลย์ (Cayley's table)**

ต่อไปจะทบทวนสมบัติของจำนวนเต็มบางประการ ซึ่งอาจจะถูกนำไปอ้างอิงถึงหรือนำไปใช้ในโอกาสต่อไป

บทนิยาม 1.6 กำหนดให้ a,b เป็นจำนวนเต็ม และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะกล่าวว่า a **คอนกรูเอนซ์กับ** b **มอดุโล** n **(**a **is congruent to** b **modulo** n**)** เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{n}$ ก็ต่อเมื่อ $n \mid (a-b)$ (n หาร $(a-b)$ ลงตัว) หรือ $a-b=kn$ บางจำนวนเต็ม k

บทนิยาม 1.7 กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มและ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะเขียนแทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมดที่คอนกรูเอนซ์กับ a มอดุโล n ด้วยสัญลักษณ์ $[a]$ หรือ $\bar{a}$ เมื่อ

$$\begin{aligned}[a] &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{n}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid n \mid (x-a)\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x-a=kn \text{ บางจำนวนเต็ม } k\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x=a+kn \text{ บางจำนวนเต็ม } k\}\end{aligned}$$

เรียก $[a]$ ว่าเป็น **ชั้นสมมูล (equivalence class)** ของจำนวนเต็มภายใต้คอนกรูเอนซ์มอดุโล n ที่มี a เป็นสมาชิก และเรียก a ว่าเป็น **ตัวแทน (representation)** ของชั้นสมมูล $[a]$

ทฤษฎีบท 1.8 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่าความสัมพันธ์คอนกรูเอนซ์มอดุโล n จะแบ่งเซตของจำนวนเต็มออกเป็น n ชั้นสมมูลของจำนวนเต็มภายใต้คอนกรูเอนซ์มอดุโล n ที่แตกต่างกัน

ชั้นสมมูลของจำนวนเต็มภายใต้คอนกรูเอนซ์มอดุโล n บนเซตของจำนวนเต็มที่แตกต่างกัน คือ $[0],[1],\ldots,[n-1]$ หรือ $\bar{0},\bar{1},\ldots,\overline{n-1}$ จะใช้สัญลักษณ์ $\mathbb{Z}_n$ แทนเซต $\{[0],[1],\ldots,[n-1]\}$ หรือ $\{\bar{0},\bar{1},\ldots,\overline{n-1}\}$ เช่น $\mathbb{Z}_3=\{[0],[1],[2]\}$ เมื่อ

$$[0]=\{x \in \mathbb{Z} \mid x=3k \text{ บางจำนวนเต็ม } k\}=\{\ldots,-9,-6,-3,0,3,6,9,\ldots\}$$

$[1]=\{x\in\mathbb{Z}\mid x=1+3k$ บางจำนวนเต็ม $k\}=\{\ldots,-8,-5,-2,1,4,7,10,\ldots\}$

$[2]=\{x\in\mathbb{Z}\mid x=2+3k$ บางจำนวนเต็ม $k\}=\{\ldots,-7,-4,-1,2,5,8,11,\ldots\}$

ข้อสังเกต

1. อินเตอร์เซกชันของชั้นสมมูลของจำนวนเต็มภายใต้คอนกรูเอนซ์มอดุโล 3 สองชั้นสมมูลใดๆ จะเป็นเซตว่าง กล่าวคือ $[0]\cap[1]=\varnothing,[0]\cap[2]=\varnothing,[1]\cap[2]=\varnothing$
2. $[0]\cup[1]\cup[2]=\mathbb{Z}$
3. สำหรับชั้นสมมูลของจำนวนเต็มภายใต้คอนกรูเอนซ์มอดุโล 3 นั้น จะได้ว่าชั้นสมมูลหนึ่งชั้นสมมูลใดๆ สามารถเขียนได้หลายรูปแบบ โดยเปลี่ยนแต่ละตัวแทนซึ่งเป็นสมาชิกของชั้นสมมูลนั้นๆ เช่น $[-9]=[-6]=[-3]=[0]=[3]=\ldots$ และตัวแทนของชั้นสมมูลเหล่านี้จะต่างกันด้วยจำนวน $3k$ เมื่อ $k\in\mathbb{Z}$ เพื่อความสะดวกจะใช้จำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่น้อยที่สุดจากแต่ละชั้นสมมูลมาเป็นตัวแทน
4. สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n เซตของจำนวนเต็มมอดุโล n จะประกอบกันเป็น ผลแบ่งกั้น (partition) ของเซตของจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}$ นั่นเอง

ตัวอย่าง 1.9 ตารางการดำเนินการทวิภาค $+_4$ บน $\mathbb{Z}_4$ คือ

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

บทนิยาม 1.10 กำหนดให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง การดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต A จะสอดคล้องกับ**สมบัติการสลับที่ (commutative property หรือ abelian property)** ก็ต่อเมื่อ $a*b=b*a$ สำหรับทุกๆ $a,b\in A$

บทนิยาม 1.11 กำหนดให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง การดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต A จะสอดคล้องกับ**สมบัติการเปลี่ยนหมู่ (associative property)** ก็ต่อเมื่อ $(a*b)*c=a*(b*c)$ สำหรับทุกๆ $a,b,c\in A$

ตัวอย่าง 1.12 กำหนดให้ $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ และการดำเนินการทวิภาคบนเซต A กำหนดโดยตารางต่อไปนี้

*	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	5	6	4
3	3	1	2	6	4	5
4	4	6	5	1	3	2
5	5	4	6	2	1	3
6	6	5	4	3	2	1

จะเห็นว่า การดำเนินการทวิภาคในตัวอย่าง **ไม่มี**สมบัติการสลับที่ เพราะว่า $4*5=3$ แต่ $5*4=2$

ตัวอย่าง 1.13 กำหนดให้ $A=\{a,b,c,d\}$ และกำหนดการดำเนินการบนเซต A ดังตารางต่อไปนี้

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

จากตาราง จะได้ว่า $b*a=b, b*b=c, b*c=d, b*d=a$ ฯลฯ นอกจากนี้ยังได้อีกว่า * เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต A และสอดคล้องกับสมบัติการสลับที่และสมบัติการเปลี่ยนหมู่

หมายเหตุ การแสดงว่า การดำเนินการทวิภาค * บนเซต A ที่กำหนดโดยตารางแสดงการดำเนินการนั้นมีสมบัติการเปลี่ยนหมู่และสมบัติการสลับที่ จะต้องทำโดยการแจกแจงกรณี เช่น ในตัวอย่างข้างต้นนั้น ถ้าต้องการแสดงว่า $(a*b)*c=a*(b*c)$ สำหรับทุกๆ $a,b,c\in A$ จะต้องทำการแจงกรณีทั้งหมด 4^3 = 64 กรณี และในการแสดงว่า $a*b=b*a$ สำหรับทุก ๆ $a,b\in A$ จะต้องทำการแจงกรณีทั้งหมด 6 กรณี นั่นคือ

$a*b=b=b*a$ $\quad$ $a*c=c=c*a$ $\quad$ $a*d=d=d*a$

$b*c=d=c*b$ $\quad$ $b*d=a=d*b$ $\quad$ $c*d=b=d*c$

ข้อสังเกต

สำหรับการดำเนินการ $*$ บนเซต A จะเรียกว่าเป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต A จะต้องสอดคล้องกับสมบัติ 2 ข้อต่อไปนี้

1. $a*b$ จะต้องได้ผลลัพธ์เพียงค่าเดียวเท่านั้น สำหรับทุกๆ $a,b \in A$
2. $a*b \in A$ สำหรับทุกๆ $a,b \in A$

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงแสดงว่า การหาร ($\div$) ไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$
2. จงแสดงว่า การลบ ($-$) ไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของจำนวนเต็มบวก $\mathbb{Z}^+$
3. กำหนดให้ $*:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ นิยามโดย $a*b$ เท่ากับจำนวนที่มีค่าน้อยกว่าระหว่าง a กับ b หรือเท่ากับ a หรือ b ถ้า $a=b$ เช่น $3*8=3$ และ $-2*-2=-2$ จงพิจารณาว่า $*$ ที่กำหนดให้เป็นการดำเนินการทวิภาคหรือไม่
4. จงเขียนตารางการดำเนินการทวิภาค $\cdot_4$ บน $\mathbb{Z}_4$
5. จงเติมสมาชิกลงในตารางแสดงการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต $\{a,b,c,d\}$ แล้วทำให้ $*$ สอดคล้องกับสมบัติการสลับที่

$*$	a	b	c	d
a	a	b		d
b		c		
c	c	d	a	b
d		a		c

6. จงเติมสมาชิกลงในตารางแสดงการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต $\{w,x,y,z\}$ แล้วทำให้ $*$ สอดคล้องกับสมบัติการเปลี่ยนหมู่

$*$	w	x	y	z
w	y			
x	z	w		
y				
z				w